УДК 330.101.542
DOI: https://doi.org/10.32782/2413-9971/2021-37-8

Лісовська В. П.
кандидат фізико-математичних наук,
професор кафедри вищої математики
ДВНЗ «Київський національний економічний університет
імені Вадима Гетьмана»
Кудик Т. О.
кандидат економічних наук,
доцент кафедри корпоративних фінансів і контролінгу
ДВНЗ «Київський національний економічний університет
імені Вадима Гетьмана»
Васильєва Д. О.
аспірантка кафедри корпоративних фінансів і контролінгу
ДВНЗ «Київський національний економічний університет
імені Вадима Гетьмана»

Lisovska Valentyna
Candidate of Physical and Mathematical Sciences,
Professor of the Department of Higher Mathematics
Kyiv National Economic University named after Vadym Hetman
Kudyk Tetyana
Candidate of Economic Sciences,
Assistant Professor of the Department of Corporate Finance and Controlling
Kyiv National Economic University named after Vadym Hetman
Vasylieva Dariia
Postgraduate Student of the Department of Corporate Finance and Controlling
Kyiv National Economic University named after Vadym Hetman

МОДЕЛЮВАННЯ ЛІНІЙНИМИ РІЗНИЦЕВИМИ РІВНЯННЯМИ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ

Анотація. У статті розглядаються економіко-математичні моделі і вивчаються соціально-економічні процеси, які розвиваються з часом, а також математичні моделі, що їх описують. Це динамічні моделі. Розрізняють динамічні моделі з неперервним і дискретним часом, тобто неперервні та дискретні моделі. Отже, залежно від типу динаміки системи, що досліджується, динамічні моделі можуть підрозділятися на дискретні і неперервні. У дискретних динамічних моделях застосовують різницеві рівняння або системи різницевих рівнянь; у неперервних динамічних моделях використовують диференційні рівняння або системи диференційних рівнянь. Окрім того, в окремих випадках можуть зустрічатися системи зі змішаною динамікою, тоді для їх опису використовують диференційно-різницеві рівняння. Різницеві рівняння і системи рівнянь використовуються успішно у моделюванні динамічних процесів (в економіці, банківській справі та ін.). У даній роботі досліджуємо такі рівняння, а також показуємо їх застосування до розв’язання задач економіки. Зокрема, розглядаються саме дискретні моделі, що описуються різницевими рівняннями.

Ключові слова: різницеві рівняння, динамічні моделі, лінійні диференціальні рівняння, однорідні та неоднорідні диференціальні рівняння, ціна, стійкість, попит, пропозиція.

Вступ та постановка проблеми. В економічних дослідженнях часто зустрічаються задачі, у яких змінні набувають дискретних числових значень, тобто змінна t набуває значень із множини невід’ємних цілих чисел $Z_+ = \{0,1,2,...\}$ та інтерпретується як номер періоду часу. Наприклад, на кінець місяця, кварталу, року тощо оптимізуються результати виробництва; нарахування відсотків по банківському внеску на кінець місяця, півроку, на кінець року. Окрім того, оскільки обчислювальні машини оперують тільки числами, тому під час використання комп’ютерної техніки всі неперервні процеси зводяться до дискретних. У такому разі від диференціальних рівнянь, які описують ті чи інші економічні процеси, переходять до різницевих рівнянь. Обмежимося надалі викладом моделей, які описуються такими рівняннями.

Диференціальні та різницеві рівняння є ефективним інструментом математичного моделювання. Різницеві рівняння та системи різницевих рівнянь відіграють велику роль і мають найбільш широке застосування в економічній теорії. Значну кількість економічних законів доводять саме за допомогою різницевих рівнянь чи систем таких рівнянь, тобто рівнянь із дискретним часом. Застосування різницевих рівнянь та систем різницевих рівнянь в економіці представлено, зокрема, в таких моделях, як динамічна модель Кейнса, модель економічного циклу Самуельсона – Хікса, що описуються лінійними різницевими рівняннями другого порядку, макромодель неокласичного зростання, зокрема макромодель зростання у випадку економіки з двома секторами – виробництва предметів споживання та виробництва засобів виробництва (капітальних благ), модель економічного циклу Філіпса, модель Пі, модель економічного циклу Кальдора, ринкова модель із запасами, модель ринку із запізненням збуту тощо.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. В економічних дослідженнях часто зустрічаються задачі, у яких змінні набувають дискретних числових значень. Оскільки обчислювальні машини оперують тільки з числами, тому у разі використання комп’ютерної техніки всі неперервні процеси зводяться до дискретних. У такому разі від диференціальних рівнянь, які описують різні економічні процеси, переходять до різницевих рівнянь.

В економічній літературі відображення проблематики моделювання різних економічних процесів було ще у XVIII ст. У XIX ст. значний внесок у моделювання ринкової економіки зробила математична школа (Л. Вальрас, О. Курно, В. Парето та ін.). У XX ст. математичні методи моделювання застосовувалися дуже широко. Відомі роботи Нобелівських лауреатів з економіки практично всі пов'язані з моделюванням ринкової економіки (Д. Хікс, Р. Солоу, В. Леонтьєв, П. Самуельсон, Є. Слуцький та ін.). Вивчення якісних методів аналізу динамічних моделей є важливим для фахівців, які спеціалізуються у сфері економічної теорії, математичних методів в економіці, макроекономіці. Сучасний економіст повинен уміти моделювати і досліджувати динаміку процесів в економічних, соціальних та інших системах.

Різницеві рівняння і системи рівнянь використовуються успішно у моделюванні динамічних процесів (в економіці, банківській справі та ін.). Саме тоді, коли зміна процесу відбувається стрибкоподібно, або дискретно, зручно і доцільно застосовувати різницеві рівняння та системи рівнянь.

Тим часом теорія динамічних систем із дискретним часом, що виникла в результаті побудови математичних моделей реальних економічних та фізичних процесів на стику теорії різницевих рівнянь і дискретних випадкових процесів, нині переживає період бурхливого розвитку і широкого застосування у найрізноманітніших царинах життєдіяльності людини (із цього приводу див. роботу [6]). За останні десятиліття київською школою нелінійної механіки були виконані систематичні та глибокі дослідження динамічних систем із розривними траєкторіями, або, як їх ще інакше називають, диференціальні рівняння з імпульсною дією. Детальна інформація про диференціальні рівняння з імпульсною дією міститься у відомій монографії А.М. Самойленко та М.О. Перестюка [7]. Системам диференціальних рівнянь з імпульсною дією присвячено праці багатьох авторів, таких як М.А. Айзерман, Ф.А. Гантмахер, В.Д. Мільман, А.Д. Мишкіс, Ю.А. Митропольський, А.М. Самойленко, М.О. Перестюк, М.У. Ахметов, Д. Векслер, А. Халанай та ін. У деяких роботах, присвячених імпульсним системам, розкрито як загальні питання теорії періодичних розв'язків [5], так і методи якісного їх дослідження, асимптотичного інтегрування, різні способи наближеної побудови розв'язків.

Усі динамічні макромоделі, як аналітичні, так і ті, які допускають лише кількісні дослідження, умовно поділяють на дві групи: моделі економічного зростання (описуються лінійними та нелінійними різницевими рівняннями першого порядку) та моделі економічного циклу, або їх ще називають моделями економічних коливань (це дискретні моделі другого порядку, зокрема модель Кейнса, модель Самуельсона – Хікса).

Метою даної роботи є дослідження моделей, які описуються різницевими рівняннями першого порядку.

Результати дослідження. Розглянемо приклади моделей, що описуються різницевими рівняннями першого порядку.

Динаміка банківського внеску. Нехай вкладник поклав до банку деяку грошову суму $y(0)=C$ із річною ставкою. Нехай $y(t)$ – величина внеску після t місяців; p – річна відсоткова ставка, $0<p<1$. Тоді зростання відсоткового внеску задається різницевим рівнянням першого порядку:

$$y(t+1)=(1+p)y(t). \qquad (1)$$

Маємо лінійне однорідне різницеве рівняння першого порядку зі сталими коефіцієнтами. Для розв'язання цього рівняння застосуємо метод ітерації. Приймемо $t=0,1,2,\dots$. Уважаємо, що задано $y(0)=C.$ Маємо

$$y(1)=(1+p)y(0)=(1+p)C, \quad y(2)=(1+p)P(1)=\left(1+p\right)^2 C,$$

$$y(3)=(1+p)y(2)=\left(1+p\right)^3 C, \dots, \quad y(t)=(1+p)y(t-1)=\left(1+p\right)^t C.$$

Дістали загальний розв'язок однорідного ріняння (1), який описується формулою:

$$y(t)=\left(1+p\right)^t C\ . \qquad (2)$$

Зауважимо, що значення $y(t)$ через t років залежить від частоти нарахування відсотків. Якщо p відсотків річних нараховуються два рази на рік, тоді нове різницеве рівняння матиме вигляд $y(t+1)=(1+\frac{p}{2})y(t).$ При цьому крок у часі стає рівним півроку, тоді $t=0;0,5;1;1,5;\dots$ (тобто кратним $0,5$). Відповідно, у цьому разі розв'язок задаватиметься формулою $y(t)=\left(1+\frac{p}{2}\right)^{2t}C.$ І взагалі, якщо відсотки нараховуються k разів на рік, то динаміка внеску описуватиметься рівнянням

$$y(t+1)=(1+\frac{p}{k})y(t) \qquad (3)$$

із кроком у часі $\frac{1}{k}$, де $t=0;1/k;2/k;3/k;\dots$ У цьому разі розв'язок задаватиметься формулою $y(t)=\left(1+\frac{p}{k}\right)^{kt}C.$

Якщо ж банк пропонує неперервне нарахування відсотків, тоді відсотки добавляються до поточного внеску в кожний момент часу і тоді різницеве рівняння не підходить. Зауважимо, що неперервне нарахування відповідає випадку $k\to\infty$. Перейдемо до границі при $k\to\infty$ в останній рівності та, застосовуючи другу важливу границю, дістанемо $y(t)=\lim\limits_{k\to\infty}\left(1+\frac{p}{k}\right)^{kt}C=C\cdot e^{kt}.$

Інакше, можна перейти до границі у самому різницевому рівнянні (3). Для цього позначимо $h=\frac{1}{k}$, тоді $h\to 0$ коли $k\to\infty.$ Перепишемо рівняння (3) у вигляді $\frac{y(t+1)-y(t)}{h}=py(t).$ Оскільки $\lim\limits_{h\to 0}\frac{y(t+1)-y(t)}{h}=\frac{dy(t)}{dt}$, то останнє рівняння набуде вигляду $\frac{dy(t)}{dt}=py(t).$ Це є звичайне диференціальне рівняння першого порядку з відокремлюваними змінними, розв'язок якого за початкових умов $y(0)=C$ подається формулою $y(t)=C\cdot e^{kt}.$

Зауважимо, що ми перейшли від різницевого рівняння до диференціального. Але такий перехід не завжди можливий, тоді як від диференціального рівняння завжди можна перейти до різницевого.

У прикладі 1 розглянули спрощений випадок, оскільки вкладник не здійснював ніяких операцій із вкладом, який він спочатку інвестував банку. Розглянемо випадок, коли інвестор поповнюватиме свій внесок або зніматиме частину внеску для власних потреб (реінвестувати). У цьому разі його називають активним інвестором.

Активний інвестор. Зростання відсоткового внеску з регулярними внесками визначається за формулою $y(t+1)=(1+p)y(t)+a(t),$ де $a(t)$ – сума грошей, яку інвестор додатково вкладає до банку в період t дискретної моделі. У разі коли інвестор зніматиме деяку суму грошей, будемо вважати $a(t)<0.$ Вивчимо випадок, коли $a(t)=a=const.$ Тоді дістанемо рівняння

$$y(t+1)=(1+p)y(t)+a, \qquad (4)$$

в якому $a-$ величина щомісячного внеску.

Це лінійне неоднорідне різницеве рівняння першого порядку зі сталими коефіцієнтами. Із властивостей розв'язку таких рівнянь відомо, що його загальний розв'язок є сумою загального розв'язку відповідного однорідного рівняння та деякого частинного розв'язку даного неоднорідного рівняння, яке знайдемо за методом варіації довільної постійної. Спочатку розглянемо відповідне (4) лінійне однорідне рівняння $y(t+1)=(1+p)y(t)$, загальний розв'язок якого знайдено методом ітерації в попередньому прикладі. Він описується рівністю (2).

Лінійне неоднорідне різницеве рівняння першого порядку (4) розв'яжемо методом варіації довільної постійної. Будемо шукати його розв'язок у тому ж вигляді, що і розв'язок відповідного лінійного однорідного рівняння (1), але C уважатимемо не довільною постійною, а деякою невідомою функцією $C(t)$, $t=1,2,...$, тобто

$$y(t)=\left(1+p\right)^t C(t). \tag{5}$$

Функцію $C(t)$ знайдемо підстановкою в рівняння (4). Отже, $C(t+1)\left(1+p\right)^{t+1}=(1+p)\left(1+p\right)^t C(t)+a$, або $C(t+1)\left(1+p\right)^{t+1}=\left(1+p\right)^{t+1}C(t)+a$, тоді $C(t+1)=C(t)+a\left(1+p\right)^{-t-1}$. Виконаємо послідовно підстановки, вважаючи, що задано $C(0)=K$ (K – довільна постійна):

$$C(1)=C(0)+\frac{a}{1+p}=K+\frac{a}{1+p},$$

$$C(2)=C(1)+\frac{a}{(1+p)^2}=K+\frac{a}{1+p}+\frac{a}{(1+p)^2}=K+\frac{a}{1+p}\left(1+\frac{1}{1+p}\right),$$

$$C(3)=C(2)+\frac{a}{(1+p)^3}=K+\frac{a}{1+p}+\frac{a}{(1+p)^2}+\frac{a}{(1+p)^3}=K+\frac{a}{1+p}\left(1+\frac{1}{1+p}+\frac{1}{(1+p)^2}\right),...,$$

$$C(t+1)=C(t)+\frac{a}{(1+p)^{t+1}}=K+\frac{a}{1+p}+\frac{a}{(1+p)^2}+\frac{a}{(1+p)^3}+...+\frac{a}{(1+p)^{t+1}}=$$

$$=K+\frac{a}{1+p}\left(1+\frac{1}{1+p}+\frac{1}{(1+p)^2}+...+\frac{1}{(1+p)^t}\right).$$

Отже,

$$C(t)=K+\frac{a}{1+p}\left(1+\frac{1}{1+p}+\frac{1}{(1+p)^2}+...+\frac{1}{(1+p)^{t-1}}\right)=K+\frac{a}{1+p}\sum_{i=0}^{t-1}\frac{1}{(1+p)^i}. \tag{6}$$

Підставимо (6) в (5), дістанемо загальний розв'язок заданого неоднорідного рівняння:

$$P(t)=\left(1+p\right)^t\left(K+\frac{a}{1+p}\sum_{i=0}^{t-1}\frac{1}{(1+p)^i}\right).$$

Оскільки $\left(\sum_{i=0}^{t-1}\frac{1}{(1+p)^i}\right)=S_n$ – сума n членів геометричної прогресії, у якої перший член $b_1=1$, знаменник $q=\frac{1}{1+p}<1$, тоді за формулою $S_n=\frac{b_1(1-q^n)}{1-q}$ знайдемо

$$P(t)=\left(1+p\right)^t\left(K+\frac{a}{1+p}\frac{1-\left(\frac{1}{1+p}\right)^t}{1-\frac{1}{1+p}}\right)=K\left(1+p\right)^t+\left(1+p\right)^t\frac{a}{1+p}\frac{(1+p)^t-1}{p(1+p)^{t-1}}=$$

$$=.K\left(1+p\right)^t+\frac{a}{p}\left((1+p)^t-1\right). \tag{7}$$

Отже, із (7) маємо $P(t)=.K\left(1+p\right)^t+\frac{a}{p}\left((1+p)^t-1\right)$, або

$$P(t)=.\left(K+\frac{a}{p}\right)\left(1+p\right)^t-\frac{a}{p}. \tag{8}$$

Зауважимо, що як і в попередньому прикладі, можна у різницевому рівнянні перейти до границі та звести рівняння (4) до лінійного неоднорідного диференціального рівняння виду $\frac{dy(t)}{dt}=py(t)+a$. Нескладно пересвідчитися, що розв'язком останнього рівняння є функція $y(t)=C\cdot e^{pt}-\frac{a}{p}$.

Розглянемо випадок, аналогічний попередньому, коли a може бути від'ємним значенням.

Розглянемо такий приклад: величина боргу по займу є регулярними виплатами за формулою

$$y(t+1)=(1+p)y(t)-b, \tag{9}$$

де b – розмір виплат.

Знову маємо лінійне неоднорідне різницеве рівняння першого порядку зі сталими коефіцієнтами. Застосовуємо метод розв'язання, як і в попередньому прикладі. Загальний розв'язок лінійного однорідного рівняння $y(t+1)=(1+p)y(t)$ знайдено методом ітерації в попередньому прикладі. Він описується рівністю (2). Лінійне неоднорідне різницеве рівняння першого порядку (9) розв'яжемо методом варіації довільної постійної. Будемо шукати його розв'язок у тому ж вигляді, що і розв'язок відповідного лінійного однорідного рівняння (1), але C уважатимемо не довільною постійною, а деякою невідомою функцією $C(t)$, $t=1,2,...$, тобто

$$y(t)=\left(1+p\right)^t C(t), \tag{10}$$

де функцію $C(t)$ знайдемо підстановкою в рівняння (9). Отже, $C(t+1)(1+p)^{t+1} = (1+p)(1+p)^{t} C(t) - b$, або $C(t+1)(1+p)^{t+1} = (1+p)^{t+1} C(t) - b$, , тоді $C(t+1) = C(t) - b(1+p)^{-t-1}$. Виконаємо послідовно підстановки, вважаючи, що задано $C(0) = K$ (K – довільна постійна), знайдемо, що

$$C(t) = K - \frac{b}{1+p}\left(1 + \frac{1}{1+p} + \frac{1}{(1+p)^2} + ... + \frac{1}{(1+p)^{t-1}}\right) = K - \frac{b}{1+p}\sum_{i=0}^{t-1}\frac{1}{(1+p)^i}. \quad (11)$$

Підставимо (11) в (10), дістанемо загальний розв'язок рівняння (9): $P(t) = (1+p)^t\left(K - \frac{b}{1+p}\sum_{i=0}^{t-1}\frac{1}{(1+p)^i}\right)$. Оскільки $\left(\sum_{i=0}^{t-1}\frac{1}{(1+p)^i}\right) = S_n$ – сума n членів геометричної прогресії, у якої перший член $b_1 = 1$, знаменник $q = \frac{1}{1+p} < 1$, тому

$$P(t) = (1+p)^t\left(K - \frac{b}{1+p}\frac{1-\left(\frac{1}{1+p}\right)^t}{1-\frac{1}{1+p}}\right) = K(1+p)^t - (1+p)^t\frac{b}{1+p}\frac{(1+p)^t - 1}{p(1+p)^{t-1}} =$$
$$= K(1+p)^t - \frac{b}{p}\left((1+p)^t - 1\right). \quad (12)$$

Отже, із (12) маємо $P(t) = .K(1+p)^t - \frac{b}{p}\left((1+p)^t - 1\right)$, або

$$P(t) = .\left(K - \frac{b}{p}\right)(1+p)^t + \frac{b}{p}. \quad (13)$$

Наведемо ще приклад: відомо, що попит q_k на деяку продукцію у k – му році є лінійною функцією ціни p_k у цьому році: $q_k = ap_k$, а пропозиція s_k також є лінійною функцією ціни p_{k-1} у попередньому році: $s_k = bp_{k-1}$. Визначимо динаміку зміни ціни рівноваги у кожному році.

Оскільки рівноважна ціна визначається з умови, що пропозиція та попит однакові, тобто $q_k = s_k$, тому $ap_k = bp_{k-1}$. Це є різницеве рівняння першого порядку. Застосовуючи метод ітерацій, дістанемо $p_k = C\left(\frac{b}{a}\right)^k$ – загальний розв'язок цього різницевого рівняння.

Уважаємо, що в початковий момент при $k = 0$ рівноважна ціна дорівнює p_0, тоді знайдемо $C = p_0$. Підставимо знайдене значення C в загальний розв'язок, дістанемо $p_k = p_0\left(\frac{b}{a}\right)^k$. Звідси видно, що ціна рівноваги описується виразом $\left(\frac{b}{a}\right)^k$. Можливі три випадки:

1. Якщо $\left|\frac{b}{a}\right| > 1$, то $\lim_{k\to\infty} p_k = p_0 \lim_{k\to\infty}\left(\frac{b}{a}\right)^k = \infty$. Це означає, що ціни p_k необмежено зростають.

2. Якщо $\left|\frac{b}{a}\right| < 1$, то $\lim_{k\to\infty} p_k = p_0 \lim_{k\to\infty}\left(\frac{b}{a}\right)^k = 0$. У цьому разі говорять, що коливання цін спадає.

3. У разі коли $\left|\frac{b}{a}\right| = 1$, маємо, що коливання цін є періодичним і утворюють послідовність $p_0, -p_0, p_0, -p_0, ...$

Отже, якщо попит перевищує пропозицію, то коливання цін зростає.

Найсприятливішим з економічної позиції є другий випадок, коли пропозиція перевищує попит і коливання цін спадає.

Модель ринкового регулювання ціни. Уведемо позначення: $S(t)$ – величина пропозиції товару, $D(t)$ – величина попиту на товар у період t, $P(t)$ – ціна товару.

Модель базується на основних припущеннях:

1) функція попиту лінійно залежить від поточної ціни на товар $D(t) = \alpha + A \cdot P(t)$, де $A < 0, \alpha$ – сталі параметри (попит зменшується з ростом ціни);

2) функція пропозиції лінійно залежить від ціни на товар за попередній період: $S(t) = \beta + B \cdot P(t-1)$, де $B > 0; \beta$ – сталі параметри (пропозиція на сьогодні складається на основі вчорашніх цін);

3) ціна кожного періоду встановлюється в умовах рівності попиту та пропозиції: $D(t) = S(t)$;

4) відома початкова ціна $P(0) = C, C = const$.

Виходячи з умови 3), маємо

$$\alpha + A \cdot P(t) = \beta + B \cdot P(t-1),$$

або

$$P(t) = \frac{B}{A}P(t-1) + \frac{\beta - \alpha}{A}. \quad (14)$$

Це лінійне неоднорідне різницеве рівняння першого порядку зі сталими коефіцієнтами. Спочатку розглянемо відповідне (14) лінійне однорідне рівняння

$$P(t) = \frac{B}{A}P(t-1) \quad (15)$$

та застосуємо метод ітерації. Приймемо $t = 0,1,2,...$. Уважаємо, що задано $P(0) = C$. Маємо

$$P(1) = \frac{B}{A}P(0) = \frac{B}{A}C, \quad P(2) = \frac{B}{A}P(1) = \left(\frac{B}{A}\right)^2 C,$$

$$P(3) = \frac{B}{A}P(2) = \left(\frac{B}{A}\right)^3 C, ..., \; P(t) = \frac{B}{A}P(t-1) = \left(\frac{B}{A}\right)^t C.$$

Отже, загальний розв'язок рівняння (15) описується формулою: $P(t) = \left(\frac{B}{A}\right)^t C$. Лінійне неоднорідне різницеве рівняння першого порядку (14) розв'яжемо методом варіації довільної постійної. Будемо шукати його розв'язок у вигляді

$$P(t) = \left(\frac{B}{A}\right)^t C(t), \quad (16)$$

де функцію $C(t)$ знайдемо підстановкою (16) в рівняння (14). Отже, $C(t)\left(\frac{B}{A}\right)^t = \frac{B}{A}\left(\frac{B}{A}\right)^{t-1} C(t-1) + \frac{\beta - \alpha}{A}$, або $C(t)\left(\frac{B}{A}\right)^t = \left(\frac{B}{A}\right)^t C(t-1) + \frac{\beta - \alpha}{A}$, тоді $C(t) = C(t-1) + \frac{\beta - \alpha}{A}\left(\frac{A}{B}\right)^t$. Виконаємо послідовно підстановки, як і в попередніх прикладах, уважаючи, що задано $C(0) = D$ (D – довільна постійна), знайдемо

$$C(t) = D + \frac{\beta-\alpha}{B}\left(1 + \frac{A}{B} + \left(\frac{A}{B}\right)^2 + \ldots\left(\frac{A}{B}\right)^{t-1}\right) = D + \frac{\beta-\alpha}{B}\sum_{i=0}^{t-1}\left(\frac{A}{B}\right)^i. \quad (17)$$

Підставимо (17) в (16), дістанемо загальний розв'язок заданого неоднорідного рівняння $P(t) = \left(\frac{B}{A}\right)^t\left(D + \frac{\beta-\alpha}{B}\sum_{i=0}^{t-1}\left(\frac{A}{B}\right)^i\right)$.

Оскільки $\left(\sum_{i=0}^{t-1}\left(\frac{A}{B}\right)^i\right) = S_n$ – сума n членів геометричної прогресії, то

$$P(t) = \left(\frac{B}{A}\right)^t\left(D + \frac{\beta-\alpha}{B}\frac{1-\left(\frac{A}{B}\right)^t}{\frac{A}{B}}\right) = D\left(\frac{B}{A}\right)^t + \frac{\beta-\alpha}{A}\left(\frac{B}{A}\right)^t - \frac{\beta-\alpha}{A}. \quad (18)$$

Отже, із (18) маємо $P(t) = \left(\frac{B}{A}\right)^t\left(D + \frac{\beta-\alpha}{A}\right) - \frac{\beta-\alpha}{A}$. Тут A і B – кутові коефіцієнти прямих попиту та пропозиції, що задані рівняннями $D(t) = \alpha + A \cdot P(t)$, $S(t) = \beta + B \cdot P(t-1)$.

Залежно від значень A і B можливі три випадки:

1. Якщо $\left|\frac{B}{A}\right| < 1$, то послідовність (18) збігається до точки рівноваги (де пропозиція і попит однакові), тобто $\lim_{t\to+\infty} P(t) = P^*$.

2. У разі коли $\left|\frac{B}{A}\right| > 1$, послідовність $P(t)$ розбіжна.

3. Якщо $\left|\frac{B}{A}\right| = 1$, то ціна змінюється циклічно (повторюється через кожні два періоди).

Висновки. Автори проаналізували й узагальнили матеріали публікацій і скомпонували моделі та подали методи розв'язання різницевих рівнянь, що описують динаміку банківського внеску, ринкове регулювання ціни тощо.

Особливу увагу приділено процесам, що моделюються за допомогою апарату лінійних різницевих рівнянь першого порядку. Представлено види моделей та проаналізовано властивості загальних розв'язків деяких типів різницевих рівнянь. Основний акцент зроблено на застосуванні різницевих рівнянь першого порядку до розв'язання соціально-економічних моделей.

Список використаних джерел:

1. Дыхта В.А. Динамические системы в экономике. *Введение в анализ одномерных моделей* : учебное пособие. Иркутск : БГУЭП, 2003. С. 178.
2. Коврижных А.Ю., Коврижных О.О. Дифференциальные и разностные уравнения. Екатеринбург : Урал. ун-т, 2014. 148 с.
3. Колемаев В.А. Математическая экономика : учебник для вузов. Москва : ЮНИТИ-ДАНА, 2005. 399 с.
4. Крушевский А.В. Справочник по экономико-математическим моделям и методам. Киев : Техника, 1982. 208 с.
5. Лисовская В.П. Периодические решения сингулярно возмущенных систем дифференциальных уравнений с импульсным воздействием: дис. … канд. ф.-м. н. Киев, 1990. 149 с.
6. Пічкур В.В. Теорія динамічних систем : навчальний посібник. Київ : Київський університет, 2015.
7. Самойленко А.М., Перестюк М.О. Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. Киев : Высшая школа, 1987. 288 с.

References:

1. Dykhta V.A. (2003) Dinamicheskie sistemy v ekonomike. Vvedenie v analiz odnomernykh modeley [Dynamic systems in economics. Introduction to the analysis of one-dimensional models]. Irkutsk: Izd-vo BGUEP. (in Ukrainian)
2. Kovrizhnykh A.Yu., Kovrizhnykh O.O. (2014) Differentsial'nye i raznostnye uravneniya [Differential and difference equations]. Ekaterinburg: Izd-vo Ural. un-ta. (in Russian)
3. Kolemaev V.A. (2005) Matematicheskaya ekonomika [Mathematical economics]. Moscow: YuNITI-DANA. (in Russian)
4. Krushevskiy A.V. (1982) Spravochnik po ekonomiko-matematicheskim modelyam i metodam [Handbook of economic and mathematical models and methods]. Kyiv: Tekhnika. (in Russian)
5. Lisovskaya V.P. (1990) Periodicheskie resheniya singulyarno vozmushchennykh sistem differentsial'nykh uravneniy s impul'snym vozdeystviem [Periodic solutions of singularly perturbed systems of differential equations with impulse action] (PhD Thesis), Kyiv. (in Ukrainian)
6. Pichkur V.V. (2015) Teorija dynamichnykh system [Theory of dynamical systems]. Kyiv: VPC «Kyjivsjkyj universytet».
7. Samoylenko A.M., Perestyuk M.O. (1987) Differentsial'nye uravneniya s impul'snym vozdeystviem [Differential equations with impulse action]. Kiyv: Vishcha shkola. (in Russian)

МОДЕЛИРОВАНИЕ ЛИНЕЙНЫМИ РАЗНОСТНЫМИ УРАВНЕНИЯМИ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Аннотация. В статье рассматриваются экономико-математические модели и изучаются социально-экономические процессы, которые развиваются со временем, а также математические модели, которые их описывают. Это динамические модели. Различают динамические модели с непрерывным и дискретным временем, то есть непрерывные и дискретные модели. Следовательно, в зависимости от типа динамики системы, которая исследуется, динамические модели могут подразделяться на дискретные и непрерывные. В дискретных динамических моделях применяют разностные уравнения или системы разностных уравнений; в непрерывных динамических моделях используют дифференциальные уравнения или системы дифференциальных уравнений. Кроме того, в отдельных случаях могут встречаться системы со смешанной динамикой, тогда для их описания используют дифференциально-разностные уравнения. Разностные уравнения и системы уравнений используются успешно в моделировании динамических процессов (в экономике, банковском деле и др.). В данной работе исследуем такие уравнения, а также показываем их применение в решении задач экономики. В частности, рассматриваются именно дискретные модели, которые описываются разностными уравнениями.

Ключевые слова: разностные уравнения, динамические модели, линейные дифференциальные уравнения, однородные и неоднородные дифференциальные уравнения, цена, устойчивость, спрос, предложение.

SIMULATION BY FIRST-ORDER LINEAR DIFFERENCE EQUATIONS

Summary. The article considers economic and mathematical models and studies the socio-economic processes that develop over time, as well as mathematical models that describe them. These are dynamic models. All variables in dynamic models generally depend on the time that acts as an independent variable. In economic research, there are often problems in which variables acquire discrete numerical values. For example, at the end of the month, quarter, year, etc., production results are optimized; accrual of interest on the bank deposit at the end of the month, six months, at the end of the year. In addition, because computers operate only with numbers, so when using computer technology, all continuous processes are reduced to discrete. In this case, from differential equations that describe certain economic processes, we move to difference equations. There are dynamic models with continuous and discrete time, ie continuous and discrete models. Therefore, depending on the type of dynamics of the system under study, dynamic models can be divided into discrete and continuous. In discrete dynamic models, difference equations or systems of difference equations are used; differential equations or systems of differential equations are used in continuous dynamic models. In addition, in some cases there may be systems with mixed dynamics, then differential-equation equations are used to describe them. Difference equations and systems of equations are used successfully in modeling dynamic processes (in economics, banking, etc.). It is when the change of process occurs abruptly, or discretely, that it is convenient and expedient to apply difference equations and systems of equations. The theory of dynamical systems with discrete time, which arose as a result of building mathematical models of real economic and physical processes at the junction of the theory of difference equations and discrete random processes, is currently experiencing a period of rapid development and widespread use in various spheres of human life. In this paper, we investigate the following equations, as well as show their application to solve economic problems. In particular, discrete models described by first-order difference equations are considered. Considerable attention is paid to the analysis of specific models that are meaningful and widely used in economic theory, banking, etc.

Key words: difference equations, dynamic models, linear differential equations, homogeneous and inhomogeneous differential equations, price, stability, demand, supply.